28.12.23 математика 13эл

Тема: «Формулы приведения»

§ 31 Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача Вычислить sin 870° и cos 870°.

▶ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и ещё повернётся на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 66). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 67). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◁

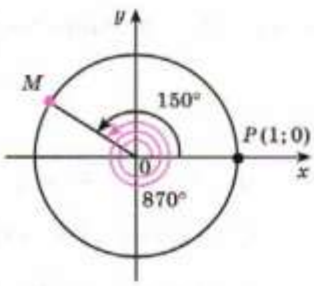

Рис. 66

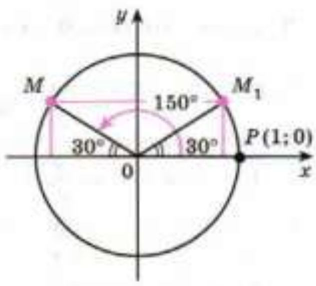

Рис. 67

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150°,\quad \cos(2 \cdot 360° + 150°) = \cos 150°, \tag{1}$$

$$\sin(180° - 30°) = \sin 30°,\quad \cos(180° - 30°) = -\cos 30°. \tag{2}$$

Функция	Аргумент β						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Для образца:

(1) Вычислить:

$\cos 150^\circ = \cos\frac{5\pi}{6} =$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

По таблице:

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

(2) Упростить:

1) $\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - tg(\pi+\alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)} =$

$= \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha - \cos\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{-\cos\alpha}{-\cos\alpha} = 1$

Дальше по аналогии!

Самостоятельно!

1. **Вычислить:**

Вычислить с помощью формулы приведения

1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$;

2. Упростить:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;